

# 1. Interpolacja wielomianowa Newtona

Zakładamy, że funkcja  $f(x)$  dana jest za pomocą tablicy wartości:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (węzłów interpolacji) oraz wartości funkcji w tych punktach:  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Zakładamy, że  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ . Zakładamy także, że węzły nie są równoodległe.

Wielomian interpolacyjny w postaci Newtona ma postać:

$$W_n(x) = b_0 p_0 + \sum_{k=1}^n b_k p_k(x) \quad (1)$$

gdzie:

$$p_0 = 1 \quad (2)$$

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$b_0 = f(x_0) \quad (4)$$

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)} \quad (5)$$

gdzie:  $b_k$  – ilorazy różnicowe funkcji  $f$  (oparte na węzłach  $x_0, x_1, \dots, x_k$ ), które w tabeli ilorazów różnicowych znajdują się na przekątnej.

Ilorazy różnicowe rzędu zerowego i pierwszego:

$$f[x_0] = f(x_0) \quad (6)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (7)$$

Ogólnie:

$$f[x_i] = f(x_i) \quad (8)$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (9)$$

Ilorazy różnicowe rzędu drugiego są równe:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$
$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$
$$\dots$$
$$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} \quad (10)$$

Ogólnie iloraz różnicowy rzędu  $n - 1$  przyjmuje postać:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \quad (11)$$

Tablica ilorazów różnicowych jest następująca:

$x_i$	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe					
		Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4	Rzędu 5
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0]$					
			$f[x_0, x_1]$				
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
			$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$	
			$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
$x_3$	$f(x_3)$	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$	
			$f[x_3, x_4]$		$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$		
$x_4$	$f(x_4)$	$f[x_4]$		$f[x_3, x_4, x_5]$			
			$f[x_4, x_5]$				
$x_5$	$f(x_5)$	$f[x_5]$					

### Przykład obliczeń:

Dane są wartości funkcji:  $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9, f(4) = 16, f(5) = 25$

Tablica ilorazów różnicowych wygląda następująco:

$x_i$	Ilorazy różnicowe				
	Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0 = 1$	$f[x_0] = 1$				
		$f[x_0, x_1] = \frac{4-1}{2-1} = 3$			
$x_1 = 2$	$f[x_1] = 4$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{5-3}{3-1} = 1$		
		$f[x_1, x_2] = \frac{9-4}{3-2} = 5$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{1-1}{4-1} = 0$	
$x_2 = 3$	$f[x_2] = 9$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{7-5}{4-2} = 1$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$
		$f[x_2, x_3] = \frac{16-9}{4-3} = 7$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{1-1}{5-2} = 0$	
$x_3 = 4$	$f[x_3] = 16$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{9-7}{5-3} = 1$		
		$f[x_3, x_4] = \frac{25-16}{5-4} = 9$			
$x_4 = 5$	$f[x_4] = 25$				

$$b_k = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)}$$

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \sum_{i=0}^2 \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j \neq i}^2 (x_i - x_j)} = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
 &\quad + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{(1-2)(1-3)} + \frac{4}{(2-1)(2-3)} + \frac{9}{(3-1)(3-2)} \\
 &= 0.5 - 4 + 4.5 = 1
 \end{aligned}$$

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}) \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n$$

$$p_2 = \prod_{i=0}^1 (x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - 1)(x - 2)$$

Wielomian interpolacyjny dla przykładu powyżej ma postać:

$$W_n(x) = b_0 p_0 + \sum_{k=1}^n b_k p_k(x)$$

$$W_n(x) = 1 + 3(x - 1) + 1(x - 1)(x - 2) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Wartości tego wielomianu w węzłach:

$$W_n(1) = 1$$

$$W_n(2) = 1 + 3(2 - 1) = 4$$

$$W_n(3) = 1 + 3(3 - 1) + 1(3 - 1)(3 - 2) = 1 + 6 + 2 = 9$$

$$W_n(4) = 1 + 3(4 - 1) + 1(4 - 1)(4 - 2) = 1 + 9 + 6 = 16$$

$$W_n(5) = 1 + 3(5 - 1) + 1(5 - 1)(5 - 2) = 1 + 12 + 12 = 25$$

Wartość tego wielomianu w punkcie  $x = 2,5$ :

$$W_n(2,5) = 1 + 3(2,5 - 1) + 1(2,5 - 1)(2,5 - 2) = 1 + 4,5 + 0,75 = 6,25$$

### **Zadanie:**

Napisz program, który będzie obliczał wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona w dowolnym punkcie. Założenia:

- a) Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach oraz liczba węzłów są zmiennymi pobieranymi z pliku tekstowego.
- b) Punkt, w którym obliczamy wartość wielomianu jest parametrem podawanym z klawiatury przez użytkownika.
- c) W wyniku działania program wypisuje:
  - Liczbę węzłów
  - Dane: Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach
  - Punkt, w którym liczymy wartość wielomianu
  - Wartość wielomianu Newtona w danym punkcie
  - Współczynniki wielomianu Newtona ( $b_k$ )

Obliczyć wartość wielomianu dla  $x = 2.5$  oraz  $x = 3.5$  dla przykładu podanego w instrukcji (MN-2-p1.txt).

Obliczyć wartość wielomianu dla  $x = -1$  oraz  $x = 2$  dla danych zamieszczonych w pliku tekstowym (MN-2-p2.txt).

W sprawozdaniu zamieścić wyniki w postaci zrzutów ekranu z konsoli.

**Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).**

**Sprawozdanie i plik z kodem \*.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-2 - gr1).**

**Plik z kodem \*.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-2).**